



Prefeitura Municipal de Curitiba  
Secretaria Municipal da Educação  
Superintendência de Gestão Educacional

# Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2021 – 2022

## Matemática

Anos  
Finais



PREFEITURA MUNICIPAL DE CURITIBA

Rafael Greca de Macedo

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO

Maria Sílvia Bacila

SUPERINTENDÊNCIA EXECUTIVA

Oséias Santos de Oliveira

DEPARTAMENTO DE LOGÍSTICA

Maria Cristina Brandalize

DEPARTAMENTO DE PLANEJAMENTO, ESTRUTURA E INFORMAÇÕES

Adriano Mario Guzzoni

COORDENADORIA DE REGULARIZAÇÃO E FUNCIONAMENTO DAS INSTITUIÇÕES

EDUCACIONAIS

Eliana Cristina Mansano

COORDENADORIA DE OBRAS E PROJETOS

Guilherme Furiatti Dantas

COORDENADORIA DE RECURSOS FINANCEIROS DESCENTRALIZADOS

Margarete Rodrigues de Lima

SUPERINTENDÊNCIA DE GESTÃO EDUCACIONAL

Andressa Woellner Duarte Pereira

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO INFANTIL

Kelen Patrícia Collarino

DEPARTAMENTO DE ENSINO FUNDAMENTAL

Simone Zampier da Silva

DEPARTAMENTO DE DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Estela Endlich

DEPARTAMENTO DE INCLUSÃO E ATENDIMENTO EDUCACIONAL ESPECIALIZADO

Gislaine Coimbra Budel

COORDENADORIA DE EQUIDADE, FAMÍLIAS E REDE DE PROTEÇÃO

Sandra Mara Piotto

COORDENADORIA DE PROJETOS

Andréa Barletta Brahim



## Carta da Secretária

Prestar atenção no processo de aprendizagem das crianças e dos estudantes é a rotina do trabalho do professor e de toda a equipe da Secretaria Municipal da Educação, no entanto, nesses dois anos tão atípicos, como o de 2020 e 2021, este olhar vigilante trouxe para todos nós, profissionais da educação, curiosidades distintas das que normalmente tínhamos no percurso habitual da escolarização.

Quando nos deparamos com a produção escolar advinda do ambiente familiar, passamos a nos perguntar se realmente nossos estudantes teriam aprendido o que lhes fora ensinado de maneira remota. As estratégias para que a aprendizagem ocorresse foram incontáveis nas unidades educacionais e, à medida que o tempo da pandemia foi passando, e o período de isolamento foi se acentuando, as distintas maneiras de se chegar aos estudantes também foram se modificando.

Ao escrevermos esta página da história da educação curitibana nos anos de 2020 e 2021, fomos constituindo práticas pedagógicas jamais pensadas para crianças, porém, viáveis para o momento. Por meio delas, coletamos materiais dos estudantes que nos deram possibilidade de compreender como estavam aprendendo, mergulhados a tanta adversidade. Logo, foi necessário identificar quais componentes curriculares ainda estavam frágeis nesse processo, para constituir um material basilar para o ano de 2021, os "Cadernos Pedagógicos de Unidades Curriculares de Transição", o qual foi reeditado para 2022.

Todo currículo em sua gênese se constitui em lógica espiralada, de maneira que os componentes de um ciclo são revisitados em outro ciclo, e assim por diante, sem que jamais se perca o todo, no entanto, esse todo vai se ampliando com os contextos, com as possibilidades de quem ensina e de quem aprende, com a complexidade de cada etapa. O movimento de ir, mas obrigatoriamente de voltar, é respeitoso com quem aprende, pois sempre há a necessidade de abrir novos territórios para aprender.

O professor, a cada contexto apresentado ao estudante, mapeia novas geografias para que a mente possa organizar outras condições de sinapses, e isso faz toda a diferença na ampliação de repertórios de aprendizagem, pois não é mais do mesmo, mas sim, o mesmo em diferentes formas, condições, conjunturas e totalidades.

Os Cadernos Pedagógicos de Unidades Curriculares de Transição têm esta matriz: o trabalho com as totalidades de um componente curricular, em dada complexidade, num ano do ciclo de aprendizagem, e em outro ano desse ciclo. Jamais se perder das totali-

dades que se ampliam e se complexificam, no entanto se convergem em um ano, outro ano e assim sucessivamente.

Respeitosamente, apresentamos este material, fruto dos saberes da Rede Municipal de Ensino de Curitiba, saberes dos estudantes, saberes dos profissionais, aqui estruturados para orientar novas possibilidades de organização do trabalho pedagógico em 2022! Permaneçam vigilantes na aprendizagem das crianças e dos estudantes, sobretudo, permaneçam pesquisadores da própria prática pedagógica, essência do trabalho do professor, legado da nossa grande mestra Marli André (in memoriam), a quem homenageio nesta apresentação.



Maria Sílvia Bacila  
**Secretária Municipal da Educação**



# Sumário

<b>APRESENTAÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>MATEMÁTICA NOS DIFERENTES TEMPOS E ESPAÇOS DE APRENDIZAGEM</b>	<b>11</b>
<b>AMPLIANDO PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>14</b>
<b>6.º ANO: MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA</b>	<b>15</b>
Para saber mais	22
<b>7.º ANO: A TECNOLOGIA DIGITAL E O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÂNGULOS</b>	<b>24</b>
Soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180^\circ$	27
Soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a $360^\circ$	29
Soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360^\circ$	30
Soma dos ângulos externos de um quadrilátero é igual a $360^\circ$	31
Relacionando a soma dos ângulos internos do triângulo com a do quadrilátero	33
Para saber mais	35
<b>8.º ANO: MODELANDO UM PROBLEMA</b>	<b>36</b>
O “peso” da mochila	39
Para saber mais	42
<b>9.º ANO: VAMOS INVESTIGAR PARA APRENDER?</b>	<b>42</b>
Para saber mais	52
<b>POSSÍVEIS ADEQUAÇÕES</b>	<b>53</b>
ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 6.º ANO	53
ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 7.º ANO	54
ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 8.º ANO	54
ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 9.º ANO	54
<b>PALAVRAS FINAIS</b>	<b>56</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>57</b>



## APRESENTAÇÃO

A educação é, em sua essência, um campo de transformações e desafios. Seu caráter dinâmico e ao mesmo tempo constitutivo, ainda mais em um contexto instaurado pela pandemia da COVID-19, exigiu de nós, profissionais da educação, educar em um tempo de incertezas quanto ao futuro, mas de certezas quanto ao nosso compromisso com uma educação pública de qualidade para a cidadania local e global, na perspectiva de uma cidade educadora.

A partir desse contexto, destaca-se o olhar cuidadoso para com a retomada e avaliação da aprendizagem estabelecida no Currículo do Ensino Fundamental: Diálogos com a BNCC da Rede Municipal de Ensino de Curitiba, ainda que cada componente curricular tenha suas especificidades no tocante à avaliação da aprendizagem.

Essa especificidade do Currículo quanto à avaliação da aprendizagem revela-se ainda mais importante no contexto atual de transição e retomada dos conteúdos neste período de continuidade da transição. Por essa razão, a avaliação educacional necessita considerar todas as etapas da aprendizagem, em um processo que considere desde os conhecimentos prévios até a construção do seu conhecimento, em conjunto entre professor e estudante, num processo mediatizado (HOFFMANN, 2001).

Para além do olhar cuidadoso com a avaliação, esse material foi pensado a partir de dois eixos principais: o eixo de propostas metodológicas voltadas para continuidade de transição e o eixo da aprendizagem a partir de diferentes níveis, diante da multidimensionalidade presente nas realidades dos estudantes, o que está em consonância com a concepção de ensino por Ciclos de Aprendizagem da RME.

As sugestões metodológicas apresentadas nesse caderno têm como objetivo complementar os estudos e reflexões do professor, considerando a possibilidade da incorporação das propostas pedagógicas nas relações de ensino que contemplem a totalidade e que vão além do contexto escolar. A escrita desse se construiu sobretudo com olhares sensíveis de cada profissional da educação, que têm a certeza e o compromisso de imprimir no processo educativo o movimento perene e essencial da educação: ensinar e aprender.



# MATEMÁTICA NOS DIFERENTES TEMPOS E ESPAÇOS DE APRENDIZAGEM

*Mais importante que saber matemática é saber pensar matematicamente.*

*José Carlos Cifuentes<sup>1</sup>*

A frase proposta na epígrafe deste material apresenta dois verbos importantes de serem analisados: “saber” e “pensar”. O “saber” se revela no sentido de um usuário da matemática, por exemplo, “saber” resolver operações de adição e subtração, ou melhor, o aprendizado se concretiza de acordo com o nível de conhecimento do usuário. Porém, o “pensar” envolve a dinâmica do pensamento matemático, é a matemática em movimento, que se manifesta nos diferentes espaços e contextos, e que requer outras habilidades de pensamento além da razão, tais como: a intuição, a imaginação e a visualização. Essas habilidades, quando imersas no modo de pensar e fazer matemática, podem estimular o desenvolvimento do pensamento matemático criativo dos estudantes.

A criatividade matemática se apresenta na ação de levantar diferentes estratégias de resolução de um problema proposto, sendo que é da resolução de problemas que o ímpeto do pensamento criativo emerge. Desse modo, o currículo de Matemática da RME de Curitiba tem como metodologia norteadora do trabalho pedagógico a Resolução de Problemas, que propicia uma mobilização de saberes no sentido de buscar soluções para diferentes situações. A resolução de problemas favorece o desenvolvimento de diversas habilidades, como leitura, compreensão, análise, proposição e organização de estratégias, entre outras, de modo a desenvolver o raciocínio lógico e a verificação da validade das estratégias utilizadas, contribuindo para um desenvolvimento das estruturas cognitivas. Desse modo, o erro faz parte do processo de aprendizagem, sendo um elemento de análise na construção do conhecimento e possibilitando reflexões e a ampliação de saberes.

Nesse sentido, é fundamental lembrar que a aprendizagem é um processo formativo, contínuo e espiralado, e que a RME, desde 1999, assumiu a organização curricular em ciclos de aprendizagens, pois, nela, são considerados o desenvolvimento, os interesses

<sup>1</sup> CIFUENTES, José Carlos. Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na “Floresta Matemática”. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – REVEMAT p. 47-66. UFSC, Santa Catarina, 2016.

e as necessidades dos(as)<sup>2</sup> estudantes, nos diferentes tempos e espaços, de modo que se respeite o ritmo de aprendizagem de cada um. Assim, é possível que as atividades pedagógicas sejam planejadas de acordo com os níveis de cada estudante, levando em consideração as especificidades de cada um.

O planejamento pedagógico precisa ser construído com muito cuidado, tendo como base, para início de trabalho, uma análise criteriosa da aprendizagem de cada estudante. Com essa análise de caráter diagnóstico, elabora-se um planejamento traçando novas estratégias e ações pedagógicas, levando em consideração os conhecimentos do estudante em relação ao ano anterior e avançando naquilo que ele pode oferecer de melhor, diminuindo a ansiedade ou a expectativa de que todos aprendam ao mesmo tempo e no mesmo ritmo, mas sim que todos avancem de acordo com o seu potencial. Para isso, tem-se que levar em consideração que um planejamento precisa ser flexível, sendo esse um grande desafio para os dias de hoje, de fato, trabalhar com todos os estudantes em sala de aula diante de tanta diversidade.

Não obstante, destaca-se a importância do trabalho com materiais manipuláveis, jogos, atividades lúdicas, brincadeiras e de tecnologias digitais, entre outros, que envolvam os estudantes de maneira que os motive a pensar além do problema proposto, levando-os à construção de uma aprendizagem significativa de números, operações fundamentais, pensamento algébrico, medidas, geometria, pensamento estatístico e probabilístico.

Entende-se que a avaliação da aprendizagem se dá em diferentes momentos e por diferentes instrumentos, para que possam ser obtidos elementos fidedignos que permitam um planejamento posterior com mais assertividade, qualificando o trabalho pedagógico. A diversidade e a flexibilidade de instrumentos e formas de avaliar devem estar presentes no cotidiano escolar, pois ambas contribuem significativamente para a qualidade do ato de avaliar que, segundo o Currículo do Ensino Fundamental: Diálogos com a BNCC (2020)<sup>3</sup>, ressalta:

Avaliação da aprendizagem tem por objetivo fornecer informações sobre os processos de aprendizagem dos estudantes e possibilitar a análise qualitativa sobre seus avanços na construção dos conhe-

---

2 A escrita deste documento destaca inicialmente os atores do processo educativo em suas formas masculina e feminina. Deste ponto em diante, apresentaremos apenas a marca do masculino, conforme seu predomínio na Língua Portuguesa para facilitar a leitura do material, sem, contudo, desconsiderar a importante caracterização de gênero desejada nos tempos atuais.

3 Ao longo do texto, com o objetivo de dar mais fluidez à leitura, este documento será citado como Currículo do Ensino Fundamental (2020).

cimentos. Avalia-se para analisar se o currículo em ação produzido em sala de aula está considerando os diferentes tempos e ritmos de aprendizagem dos estudantes, pois o ensino também é avaliado, assegurando o (re)planejamento do professor e a (re)organização de propostas didático-pedagógicas. (CURITIBA, 2020, p. 26).

A avaliação, entendida como um processo contínuo, deve ser realizada diariamente, por meio da observação do desempenho de cada estudante, fazendo continuamente a retomada e, se necessário, as adequações metodológicas, a partir de onde se encontra cada estudante no processo de aprendizagem.

Mediante as compreensões sobre planejamento, metodologia, avaliação e recursos metodológicos adotados pela RME, o ensino e a aprendizagem da matemática são pensados, também, dentro da perspectiva das “Cidades Educadoras”, uma vez que “a cidade que educa não aponta para soluções imediatas, mas para uma compreensão mais analítica e reflexiva, seja em relação aos problemas do cotidiano ou aos desafios do mundo contemporâneo” (GADOTTI, 2006, p. 135). De modo análogo, na Educação Matemática, os conceitos não devem ser dados para o estudante como prontos, mas devem ser construídos coletivamente, a partir de análises e reflexões em torno de um determinado objeto de estudo.

Além disso, o Currículo do Ensino Fundamental (2020) adota a Resolução de Problemas como metodologia norteadora para o ensino da Matemática e como objeto de conhecimento. Em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as temáticas abordadas nos problemas, geralmente, advêm de questões sociais, ambientais, tecnológicas, dos conhecimentos prévios dos estudantes e de experiências vividas e reflexões, ou ainda de relações entre conhecimentos de outras áreas ou dentro da própria Matemática.

Nas palavras de Gadotti (2006):

Uma cidade pode ser considerada como uma cidade que educa quando, além de suas funções tradicionais — econômica, social, política e de prestação de serviços — exerce uma nova função cujo objetivo é a formação para e pela cidadania. (GADOTTI, 2006, p. 134).

Nesse sentido, cidadania vem sendo entendida como a consciência de direitos e deveres e o exercício da democracia. Entende-se que a cidadania se desenvolve por meio de

análises, reflexões e ações a respeito de situações que vivenciamos e nos cercam. Essas situações são permeadas pela Matemática e, da forma como a Matemática é concebida no Currículo do Ensino Fundamental (2020), ela é fundamental para o desenvolvimento do cidadão crítico, que analisa a realidade em que vive, reflete sobre isso, testa hipóteses, argumenta e toma decisões respaldadas em suas conclusões, articulando diferentes conhecimentos.

## AMPLIANDO PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Desde o final de dezembro de 2019 até o atual momento, o mundo se viu diante de uma pandemia em que muitas pessoas adoeceram e, infelizmente, muitas vidas foram perdidas. Em consequência, houve uma corrida contra o tempo para a criação de uma vacina e, em muitas áreas de trabalho, inclusive na educação, reestruturações e adaptações se fizeram necessárias.

Pensando no momento em que, com segurança, o ensino presencial pudesse ser retomado, percebeu-se a necessidade da elaboração de um material que viesse a contribuir com o professor para essa fase de transição entre o ensino remoto e o presencial. Com esse intuito, foi elaborado o Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, que apresenta algumas sugestões de encaminhamentos metodológicos com a intenção de retomar o conhecimento do ano anterior do estudante, ampliando para o ano escolar em que ele se encontra.

A organização desse material se deu em torno de cinco unidades temáticas, que coincidem com aquela em eixos do Currículo de Matemática da SME, que são: **números e operações, pensamento algébrico/álgebra, grandezas e medidas, geometria e estatística e probabilidade**. Para cada uma dessas unidades temáticas, foi proposto um encaminhamento com sugestões de atividades que contemplam a utilização de jogos e o trabalho com materiais manipuláveis. As propostas foram estruturadas de tal modo que pudessem ser desenvolvidas por estudantes do 6.º ao 9.º ano. Por isso, para cada atividade, foram apresentadas sugestões de aprofundamentos, que poderiam ser inseridas nas propostas de acordo com o ano escolar em que o estudante se encontra.

Cabe destacar que as propostas sugeridas foram baseadas no Currículo dos Anos Finais da RME, o qual traz como objetivo o desenvolvimento de conceitos matemáticos por meio da investigação, do desenvolvimento do raciocínio lógico e das sucessivas descobertas, articulando os conteúdos dos cinco eixos, tendo como foco a resolução

de problemas. A diferença entre o ciclo III e o ciclo IV está que, no primeiro, a finalidade é a de comunicar-se matematicamente usando os conhecimentos para compreender o mundo em que vive; enquanto, no segundo, a finalidade se amplia no sentido de gerar novos modelos de resolução para comunicar-se matematicamente e usar desses conhecimentos matemáticos para compreender o mundo em que vive.

Desse modo, com o intuito de contribuir na efetivação do trabalho pedagógico em sala de aula e expandir as aprendizagens, a seguir serão apresentadas algumas ampliações de atividades propostas no Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021. Vale ressaltar que todas as atividades, aqui sugeridas, podem ser ampliadas, conforme os critérios de ensino-aprendizagem descritos no Currículo da RME.

## 6.º ANO: MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Os objetivos do ciclo III, como mencionado anteriormente, correspondem a:

[...] desenvolver conceitos matemáticos por meio da investigação, do desenvolvimento do raciocínio lógico e das sucessivas descobertas, articulando os conteúdos dos cinco eixos, tendo como foco a resolução de problemas, a fim de comunicar-se matematicamente e usar desses conhecimentos para compreender o mundo em que vive. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 81).

No 6.º ano, tais objetivos se distribuem nos seguintes eixos e conteúdos:

- **Números e operações:** sistemas de numeração; sistema de numeração decimal; números naturais (operações fundamentais na resolução de problemas de situações aditivas e multiplicativas, potenciação, raiz quadrada exata, múltiplos e divisores, critérios de divisibilidade, números primos e compostos, decomposição em fatores primos); números racionais: significado (parte/todo, quociente, razão e número); contínuo e discreto (fração com significado de operador); frações equivalentes; comparação de frações; frações na reta numérica; operações com frações; números racionais (números decimais): operações; relação entre fração e número decimal; números decimais na reta numérica; números racionais (porcentagem): conceito; cálculo de porcentagens; relação entre fração, número decimal e porcentagem; educação financeira: sistema monetário brasileiro, acréscimos e descontos.

- **Pensamento algébrico/álgebra:** regularidades e igualdades nas operações; problemas de situação aditiva e multiplicativa; relações inversas entre as operações; noções de proporcionalidade direta e inversa.
- **Grandezas e medidas:** histórico; instrumentos e unidades de medida; medidas: comprimento: km, m, dm, cm e mm; escalas; área:  $km^2$ ,  $m^2$  e  $cm^2$ ; volume:  $cm^3$ ,  $dm^3$  e  $m^3$ ; massa: mg, g e kg; capacidade: l e ml; tempo: h, min e s; temperatura: °C; ângulo: graus, perímetro e área.
- **Geometria:** plano cartesiano (1.º quadrante): plano cartesiano (1.º quadrante): pares ordenados; localização e movimentação; retas: posições relativas; ângulos: conceito de ângulo e classificação (reto, agudo e obtuso); figuras geométricas espaciais: poliedros (prismas, pirâmides, poliedros platônicos, entre outros), elementos dos poliedros (face, aresta e vértice), corpos redondos (cone, esfera e cilindro); percepção espacial: vistas e perspectivas; figuras planas: polígonos e não polígonos; triângulos (classificação em relação aos lados e ângulos); quadriláteros (classificação de paralelogramos e trapézios); área e perímetro de retângulos e quadrados; simetria; ampliação e redução de figuras.
- **Estatística e probabilidade:** tabelas e quadros: simples e de dupla entrada; elementos: título, fonte e data; gráficos: tipos (colunas e barras simples e múltiplas, pictogramas, setores e linhas), elementos (eixos, título, fonte, data e legenda), escala, pesquisa (coleta, organização e apresentação de dados); frequência absoluta e relativa; interpretação e análise de resultados; medidas de tendência central: média aritmética simples; probabilidade: conceituação; representação fracionária, percentual e decimal.

Com base nos objetivos do ciclo e nos eixos elencados, foi desenvolvido o Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, construído com o intuito de contribuir com o trabalho do professor, apresentando algumas sugestões de encaminhamentos metodológicos com a intenção de retomar o conhecimento do ano anterior do estudante e ampliar para o ano escolar em que se encontra.

No Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, na unidade temática "números e operações", foi abordado o jogo **Tabuleiro das operações**<sup>4</sup>, que contribui para o desenvolvimento do cálculo mental, estimativas, aproximações e possibilita que o estudante elabore estratégias próprias para a resolução de um cálculo ou de uma situação-problema apresentada.

4 Disponível em: <https://mid-educacao.curitiba.pr.gov.br/2021/6/pdf/00299868.pdf>. Acesso em: out. 2021.

Além disso, com a utilização desse jogo, é possível explorar as diferentes ideias associadas às operações, visto que as cartas a serem sorteadas durante o jogo podem apresentar pequenas expressões numéricas, situações-problema, ilustrações a serem analisadas, perguntas de “verdadeiro ou falso”, entre outras.

Para a realização de aprofundamentos com esse jogo, as cartas a serem sorteadas (conforme a cor da casinha do tabuleiro em que o jogador está) contemplam adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais, podendo ser ampliado para potenciação, radiciação e também para outros conjuntos numéricos (inteiros, racionais, irracionais, reais). Essas escolhas e possibilidades de ampliações devem ser pensadas conforme os conhecimentos prévios do estudante e aprofundadas de acordo com o Currículo do ano escolar em que o estudante se encontra.

O quadro, a seguir, elenca os critérios de ensino-aprendizagem do eixo **números e operações** do 5.º ano, bem como os critérios no 6.º ano. Diante disso, é perceptível que há uma continuidade do ensino, tendo como fio condutor o movimento de avanço e a retomada constante do Currículo do ano anterior e do ano corrente.

NÚMEROS E OPERAÇÕES	
<b>5.º ano</b>	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre as operações fundamentais na resolução de problemas abordam os seguintes aspectos: adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais; adição e subtração de números racionais em representação fracionária (mesmo denominador); adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais em representação decimal. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 68-71).
<b>6.º ano</b>	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre as operações fundamentais na resolução de problemas abordam os seguintes aspectos: adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais e racionais em representação fracionária e decimal, conceito e representação de potenciação e raiz quadrada exata. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 80-83).

De modo a ampliar as atividades apresentadas do Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, na sequência, serão sugeridas possibilidades de continuidade nas propostas já apresentadas.

É possível dar continuidade ao encaminhamento anterior, porém abordando outro recurso pedagógico, como o uso de materiais manipuláveis, sendo estes estruturados ou não. A utilização de materiais manipuláveis (quadro numérico individual, materiais de contagem como: tampinhas e palitos, quadros de multiplicações para consulta, qua-

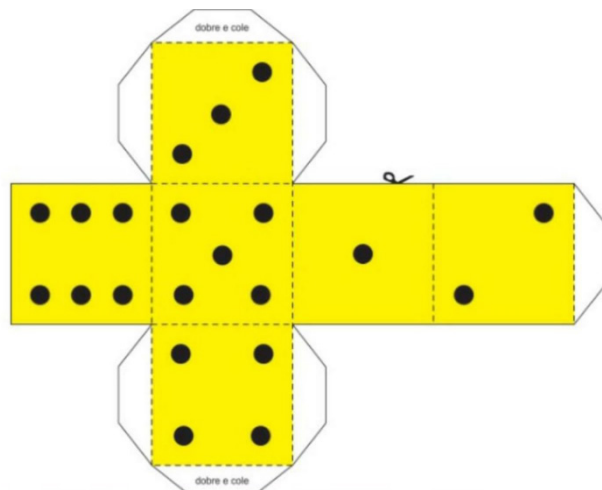
dros pitagóricos para consulta, Material Dourado, fichas escalonadas, “dinheirinho”, ábaco, régua fracionária, calculadora, dados comuns (6 faces), régua, fita métrica, sólidos geométricos, jogos, entre outros) favorece amplamente a construção do pensamento matemático, facilitando a abstração de conceitos e o desenvolvimento de habilidades mentais relacionadas ao cálculo mental e à criação de estratégias próprias para a resolução de problemas.

Tendo em vista tais potencialidades do uso de materiais manipuláveis, especialmente para o ensino da Matemática, a seguir será apresentada uma proposta voltada para explorar as operações fundamentais com estudantes do 6.º ano.

Para a realização dessa proposta, cada estudante deverá ter em mãos três dados convencionais. Caso não se tenha a quantidade necessária de dados, sugere-se que os estudantes construam 3 dados cada um, o que pode ser feito a partir de planificações impressas do dado.



Disponível em: <https://pxhere.com/es/photo/1376603>.  
Acesso em: 23 nov. 2021. Para fins pedagógicos.



Disponível em: <https://mid-educacao.curitiba.pr.gov.br/2021/6/pdf/00301787.pdf>.  
Acesso em: 23 nov. 2021. Para fins pedagógicos.

A primeira parte da proposta consiste no lançamento de 3 dados, obtendo alguns resultados predeterminados e efetuando as operações necessárias com os números obtidos no lançamento dos dados. Por exemplo: Matheus foi desafiado a obtendo o resultado 1. Ao lançar os seus dados, ele tirou os números 3, 4 e 2. Quais são os cálculos que ele pode fazer com estes números que resultam em 1?

Observando os números e analisando as possibilidades, o estudante pode observar que se ele efetuar a subtração  $4-3$  e, depois, subtrair 2 do resultado da subtração anterior, ele chegará à resposta 1. Esse raciocínio desenvolvido pelo estudante está correto, mas como registrá-lo?

Professor, neste momento é importante fazer uma breve retomada sobre a ordem de resoluções das operações numa expressão numérica e sobre o uso de sinais associativos, especialmente com relação ao uso dos parênteses.

Ao registrar o raciocínio do Matheus, temos  $2 - (4 - 3)$ . Conforme a fala do estudante, os parênteses indicam qual foi a primeira operação realizada. Em seguida, é feito o restante do cálculo, fazendo "dois menos o resultado obtido nos parênteses". Esta etapa é bastante importante, possibilitando que o estudante descreva matematicamente qual foi o raciocínio desenvolvido na questão.

Para facilitar na organização, pode-se apresentar um quadro, como o exemplo a seguir:

Números obtidos no lançamento dos dados	Operações realizadas	Resultado
2, 3 e 4	$2 - (4 - 3)$	1

Assim, o professor pode propor que os estudantes obtenham todos os resultados (inteiros) de 1 a 9 ao efetuar operações com os números obtidos nos dados. Também é possível sortear números em ordem aleatória ou mesmo maiores do que 10 que possam ser obtidos por meio das operações fundamentais com os números presentes nas faces dos dados. Em alguns casos, talvez não seja possível chegar ao resultado esperado. É importante que essas situações, se houver, sejam trazidas para discussão, a fim de verificar se é possível, de alguma maneira, chegar ao resultado ou se é realmente impossível.

Para além da exploração individual desse material, é importante que haja momentos de troca, em que os estudantes possam apresentar para a turma quais os valores que cada um tirou nos dados, as estratégias utilizadas, os cálculos realizados e os resultados obtidos. Assim, é possível buscar semelhanças e diferenças na atividade de cada um, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem e verificando que há diferentes modos de se chegar a um mesmo resultado.

Para integrar a exploração inicial, várias problematizações podem ser levantadas, conforme sugestões a seguir:

1. Camila lançou três dados e obteve os números 2, 5 e 3. Que operações ela pode ter feito para chegar ao resultado 3?
2. Joana também deveria chegar ao resultado 3, mas obteve nos dados os números 1, 2 e 5. Como ela poderá obter esse resultado?
3. Renato lançou os dados e tirou os números 4, 5 e 2, e disse que conseguiu chegar ao resultado 5. Que cálculos ele pode ter feito?
4. Vinicius lançou seus dados e obteve os números 4, 5 e 1. Qual dos cálculos abaixo ele pode ter feito para chegar ao resultado 16?
  - a.  $5 \times 4 - 1$

**b.**  $5 \times (4 - 1)$

**c.**  $4 \times (5 - 1)$

**d.**  $5 - 1 \times 4$

Professor, você pode aproveitar este momento para falar a respeito dos diferentes símbolos que representam a multiplicação, como o "x", o "." (ponto)" e mesmo o "\*" (asterisco)", que podem aparecer em diferentes situações cotidianas. O mesmo pode acontecer com o símbolo que representa a divisão, podendo ser "÷", ":" (dois pontos)" ou "/".

**5.** Milena lançou seus dados e, com valores obtidos, fez o seguinte cálculo:

$$6 - 2 \times 3$$

Qual o resultado obtido?

**6.** Pedro lançou os seus dados e obteve os números 2, 3 e 4 e tinha por objetivo chegar ao resultado 5. Ele efetuou os cálculos corretamente, mas acidentalmente, derrubou água em suas anotações, borrando seus cálculos.

$$4 \cdot 2 + 3 = 5$$

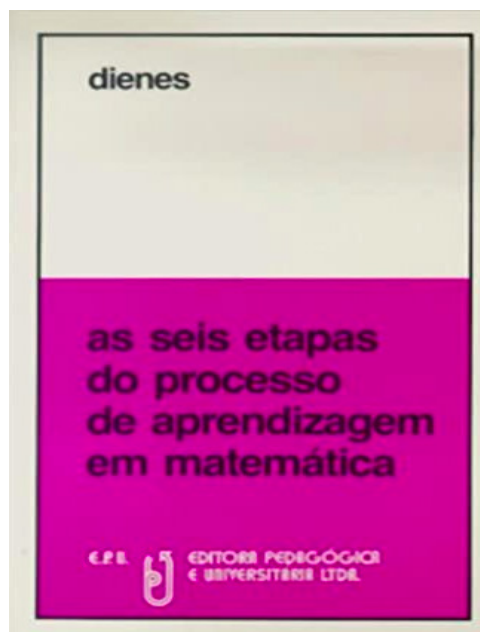
Que símbolo matemático estava escrito no lugar do borrão?

Essas problematizações mostram possibilidades de questionamentos que podem ser feitos a partir da exploração dos dados e da proposta apresentada. É claro que, ao realizar essa prática em sala, muitos outros questionamentos podem aparecer conforme as situações forem surgindo.

Professor, para ir além com exploração dessa proposta, é possível criar novas situações e ampliações, alterando as faces dos dados para números decimais e fracionários. O Currículo de Matemática já prevê no 5.º ano os conteúdos relacionados às operações com números decimais e fracionários, o qual deve ser retomado e aprofundado no 6.º ano. Assim, a proposta aqui apresentada pode ter um caráter diagnóstico e, ao mesmo tempo, possibilita o aprofundamento desses conteúdos, conforme descritos nos critérios de ensino-aprendizagem do Currículo.

Para que as discussões sejam mais ricas e possibilitem ainda mais a verificação do conhecimento e da aprendizagem dos estudantes, é importante que sejam feitos momentos de troca em que todos os estudantes tenham espaço e oportunidade para falar. Assim, além de perceberem semelhanças e diferenças entre as estratégias utilizadas pelos colegas, os estudantes têm ainda a possibilidade de ampliação do seu raciocínio, favorecendo a criação de estratégias próprias para a resolução de problemas futuros.

## Para saber mais



DIENES, Zoltan. **As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática.** São Paulo: EPU, 1972.

Quando o estudante tem contato pela primeira vez com um material manipulável, ele irá explorar sem se ater à sua finalidade. Só depois dessa exploração inicial que o estudante utilizará o material de acordo com sua finalidade. Neste livro, o autor discute o que é compreender e o que é aprender. Para isso, ele discorre sobre as etapas da aprendizagem da Matemática mediadas pelo uso de materiais manipuláveis e estruturados.



ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

Neste livro, os autores relacionam a qualidade do diálogo em sala de aula com a aprendizagem dos estudantes. Para isso, são apresentados exemplos de situações vivenciadas em sala de aula, que fundamentam modelos acerca das diferentes formas de comunicação que podem acontecer, destacando ainda o que os autores chamam de “cooperação investigativa”.



No ano de 2021, as primeiras videoaulas de Matemática do 6.º ano, gravadas pela SME e transmitidas pelo canal TV Escola Curitiba, trouxeram diferentes propostas de problematizações explorando operações com números naturais. A partir da aula 33, já surgiram novas explorações de situações-problema, ampliando agora para os números racionais.

As videoaulas estão disponíveis nos links <https://www.youtube.com/watch?v=hmzL-Sallt0I&t=12s> (Aula 1) e <https://www.youtube.com/watch?v=xBg3uO1-puQ> (Aula 33).

## 7.º ANO: A TECNOLOGIA DIGITAL E O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÂNGULOS

Os objetivos descritos para o ciclo III, que correspondem em “desenvolver conceitos matemáticos por meio da investigação, do desenvolvimento do raciocínio lógico e das sucessivas descobertas, articulando os conteúdos dos cinco eixos, tendo como foco a resolução de problemas, a fim de comunicar-se matematicamente e usar desses conhecimentos para compreender o mundo em que vive”, se distribuem no 7.º ano nos seguintes eixos e conteúdos:

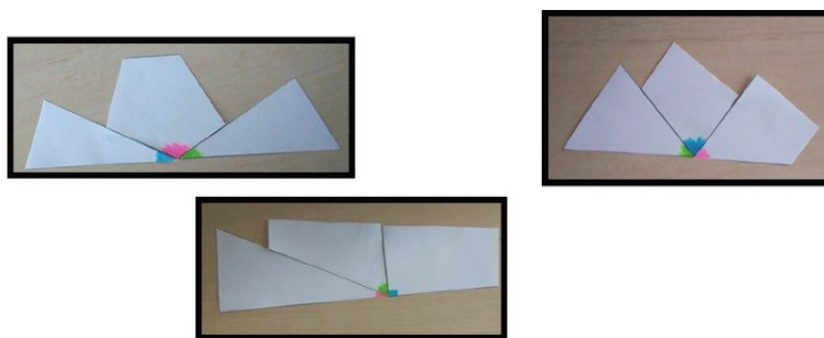
- **Números e operações:** números inteiros (na reta numérica); comparação; operações fundamentais, suas propriedades e relações; múltiplos e divisores de números naturais; números racionais (frações e números decimais, representação decimal na reta, relação entre fração e número decimal, operações com frações e números decimais, suas propriedades e relações); educação financeira (noções de juro).
- **Pensamento algébrico/álgebra:** sequências (numéricas, geométricas e algébricas) e padrões; linguagem algébrica (incógnita e variável); equações (igualdade, equações de 1.º grau); razão e proporção (razão entre dois números e entre grandezas); proporções e suas propriedades; grandezas diretamente e inversamente proporcionais.
- **Grandezas e medidas:** medidas de comprimento, área, volume, massa, capacidade, temperatura, ângulo; o número  $\pi$ ; perímetro e área.
- **Geometria:** ângulos (ângulos congruentes, ângulos adjacentes e opostos pelo vértice, ângulos complementares e suplementares); figuras geométricas espaciais (poliedros e corpos redondos); poliedros (prismas, pirâmides, poliedros platônicos, entre outros); elementos dos poliedros (face, aresta e vértice); corpos redondos (cone, esfera e cilindro); vistas e perspectivas; polígonos e não polígonos (propriedades); área de quadrados, retângulos e paralelogramos; área de triângulos; perímetro de polígonos; ângulos internos de um polígono regular; soma dos ângulos internos de quadriláteros; soma dos ângulos internos de triângulos; quadriláteros (classificação de paralelogramos e trapézios); circunferência; plano cartesiano (pares ordenados); localização e movimentação; simetria (translação, rotação e reflexão); ampliação e redução de figuras.

- **Estatística e probabilidade:** tabelas e quadros (simples e de dupla entrada); elementos (título, fonte e data); gráficos (colunas e barras simples e múltiplas, pictogramas, setores e linhas); elementos (eixos, título, fonte, data e legenda); escala; pesquisa (censitária e amostral), coleta, organização e apresentação de dados; frequência absoluta e relativa; interpretação e análise de resultados; medidas de tendência central (média aritmética simples); média aritmética ponderada; probabilidade (conceituação); representação fracionária, percentual e decimal; experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Com base nos objetivos do ciclo e os eixos elencados, foi desenvolvido o Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, construído com o intuito de contribuir com o trabalho do professor, apresentando algumas sugestões de encaminhamentos metodológicos com a intenção de retomar o conhecimento do ano anterior do estudante e ampliar para o ano escolar em que se encontra.

Desse modo, para o 7.º ano, foi desenvolvida uma proposta dentro da unidade temática geometria, abordando o assunto de ângulos. A metodologia sugerida foi a Investigação Matemática, por meio da construção e recorte de três triângulos (obtusângulo, retângulo e agudo), o que tornou o estudo sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer mais visual, levando o estudante a conjecturar hipóteses e descobrir relações.

Após a construção do triângulo e do recorte, o estudante deveria dividir cada um dos triângulos em 3 partes quaisquer, de modo que cada parte contivesse um dos ângulos internos do triângulo maior. Na sequência, ele poderia ser instigado a movimentar as três partes, de modo a agrupar os ângulos internos do triângulo, percebendo que esse agrupamento resulta em outro ângulo, o chamado ângulo raso ou ângulo de meia volta ( $180^\circ$ ). As generalizações são evidenciadas com a movimentação e os agrupamentos dos outros triângulos. Além disso, é possível também constatar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . Tais generalizações também podem ser constatadas com os quadriláteros.



Fonte: **Acervo da Secretaria Municipal da Educação**. Equipe de Matemática, 2021.

Importante ressaltar que o critério referente a ângulos vem sendo construído desde o ciclo II (4.º ano e 5.º ano), em que o estudante é instigado a reconhecer ângulos retos e não retos na construção de figuras poligonais, com o uso de instrumentos de desenho, dobraduras, tecnologias digitais e na observação do mundo físico. E também é instigado a associar o ângulo com giro ou mudança de direção, reconhecendo ângulos de um quarto de volta, de meia volta e de uma volta na resolução de problemas, incluindo o uso de tecnologias digitais.

O quadro, a seguir, elenca os critérios de ensino-aprendizagem do eixo geometria do 6.º ano, bem como os critérios do 7.º ano. Diante disso, é perceptível que há uma continuidade do ensino, tendo como fio condutor o movimento de avanço e a retomada constante do Currículo do ano anterior e do ano corrente.

GEOMETRIA	
6.º ano	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre ângulos abordam os seguintes aspectos: conceito de ângulo, ângulos nos polígonos (classificação dos triângulos quanto aos ângulos), classificação: reto, agudo e obtuso. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 82-84).
7.º ano	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre ângulos abordam os seguintes aspectos: ângulos internos de um polígono, ângulos congruentes, adjacentes e opostos pelo vértice, complementares e suplementares. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 92-93).

De modo a ampliar as atividades apresentadas do Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, na sequência, serão sugeridas possibilidades de continuidade nas propostas já apresentadas, mantendo o eixo e o critério, modificando apenas a metodologia, neste caso, para a **Tecnologia**.

A Tecnologia<sup>5</sup>, especialmente a Tecnologia Digital (TD) no ensino e aprendizagem de Matemática, está cada vez mais se fortalecendo enquanto metodologia. Professores e estudantes se viram em uma nova realidade frente às telas dos computadores, *smartphones*, aplicativos de reuniões e educacionais. Desse modo, o professor teve que reestruturar sua prática a fim de tornar a aula *on-line* (remota) mais próxima de seu estudante.

5 Importante mencionar que o entendimento que se faz por Tecnologia é de qualquer ferramenta, seja ela eletrônica ou não, que possa auxiliar, neste caso, o processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com o Currículo de Matemática da RME de Curitiba:

[...] os computadores e a utilização da internet e dos aplicativos de celulares são instrumentos interessantes no processo de ensino-aprendizagem da matemática, pois, por meio de softwares criados especialmente para auxiliar na construção de conhecimentos matemáticos, propiciam diferentes contextos de resolução de problemas através de simulações e construções conceituais, nos quais os estudantes investigam e constroem modos de resolver. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 23).

Nessa perspectiva, a Tecnologia Digital, quando pensada em conjunto a uma prática e uma sequência didática, traz elementos que podem desenvolver o pensamento criativo dos estudantes, fazendo com que eles “descubram” as relações, e por meio delas construam suas estratégias de resolução de problemas.

### Soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180^\circ$ .

Um dos modos em explorar essa propriedade é utilizando o Geogebra. A ideia não é a de reproduzir o que é perfeitamente realizável com régua e compasso, esquadro e transferidor, mas sim explorar algumas movimentações e transformações dos triângulos, compreendendo que, por mais que o triângulo seja “deformado”, a propriedade continua válida.

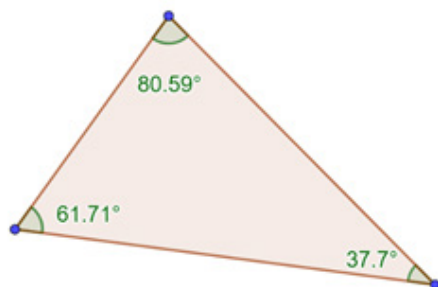
Essa exploração sugerida pode ser realizada pelos estudantes utilizando o laboratório de informática ou com uso do aplicativo do Geogebra para *smartphones*, ou então, caso essas estratégias não sejam possíveis, o professor pode construir em sala, projetando a construção no momento em que a realiza. Os questionamentos que foram sugeridos possibilitam a movimentação das ideias dos estudantes, sendo um elemento que pode favorecer a participação deles. Salientando que toda construção está disponível no link e QR Code que aparecem abaixo.

A plataforma Geogebra<sup>6</sup> permite que seja feito o *download* do *software*, bem como sua utilização de modo *on-line*. Além disso, todas as construções podem ser salvas e compartilhadas na plataforma, o que possibilita uma troca entre professores.

6

Disponível em: <https://www.geogebra.org/#>. Acesso em: 24 nov. 2021.

$$w = 61.71^\circ + 80.59^\circ + 37.7^\circ = 180^\circ$$

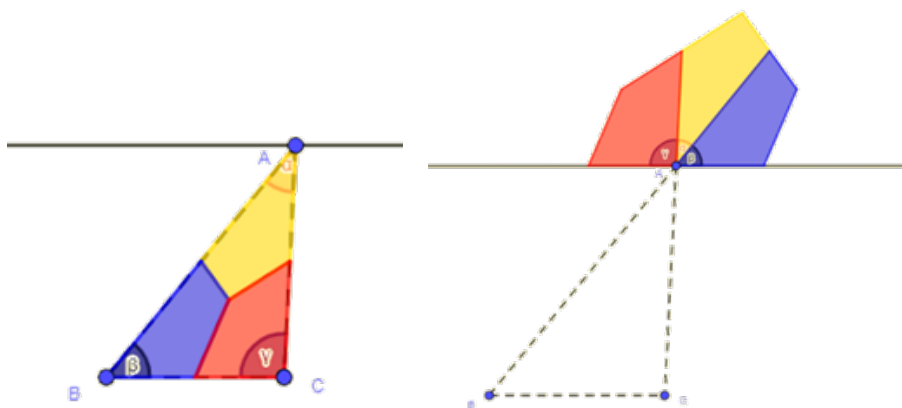


Fonte: **Acervo da Secretaria Municipal de Educação** – Equipe de Matemática, 2021.  
Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/jqey8fsx>.

1. Qual é o resultado da soma dos ângulos internos do triângulo que vocês estão observando na construção?
2. Como podemos classificar esse triângulo com relação aos seus ângulos?
3. Se movimentarmos um dos vértices, que figura se forma? E qual a soma dos ângulos internos dela?
4. Se movimentarmos dois vértices, qual é a nova figura? E a soma dos ângulos internos dela?
5. Qual a conclusão que podemos levantar?



Essa construção visual da soma dos ângulos internos também pode ser feita transladando e rotacionando alguns ângulos, como na construção disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/jsupp8hk>.

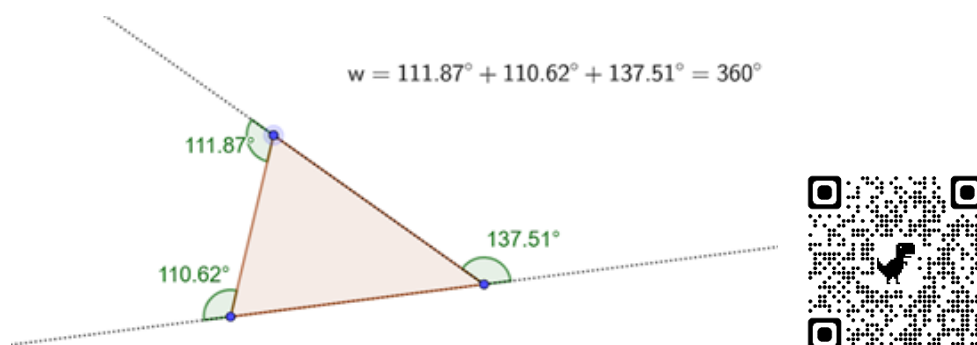


Fonte: **Tomson**, Paulo. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/jsupp8hk>. Para fins pedagógicos.

## Soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a $360^\circ$ .

Estabelecidas as relações dos ângulos internos do triângulo, de modo análogo pode ser feito com os ângulos externos.

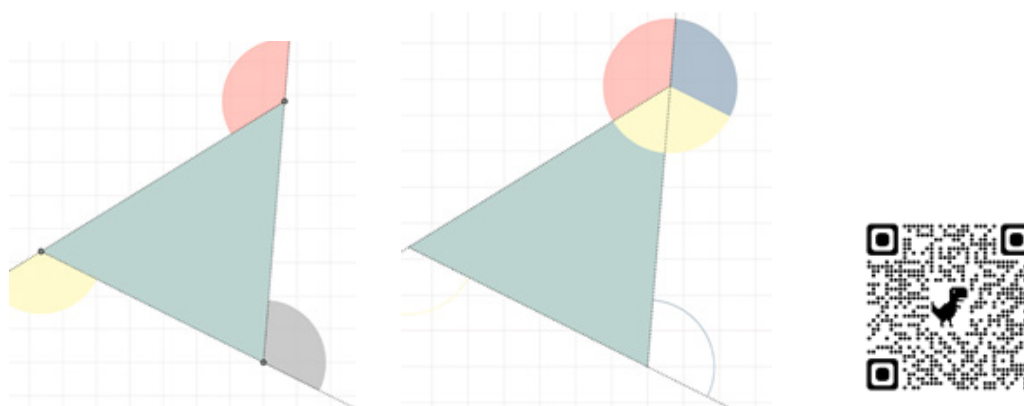
A construção pode ser observada no link: <https://www.geogebra.org/classic/ppttpntd>.



Fonte: **Acervo da Secretaria Municipal de Educação**. Equipe de Matemática, 2021.

1. Quanto está resultando a soma dos ângulos externos do seguinte triângulo que vocês estão observando na construção?
2. Se movimentarmos o vértice C, que figura se forma? E qual a soma dos ângulos externos dela?

Essa construção visual da soma dos ângulos externos também pode ser feita transladando e rotacionando alguns ângulos, como na construção disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qybw2zw5>



Fonte: Derivando a matemática.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/beqvhsth>. Acesso em: 24 nov. 2021. Para fins pedagógicos.

Soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a  $360^\circ$ .

$$w = 150.43^\circ + 87.27^\circ + 42.66^\circ + 79.65^\circ = 360^\circ$$



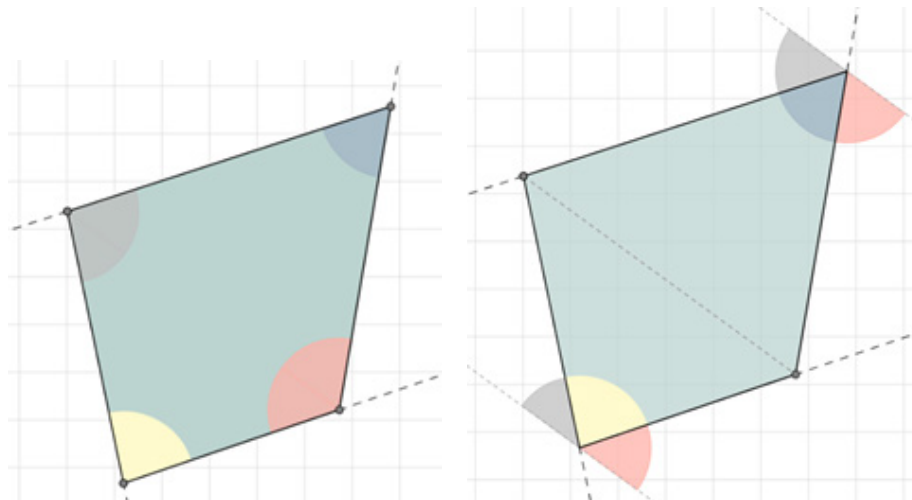
Fonte: **Acervo da Secretaria Municipal de Educação**. Equipe de Matemática, 2021.

A construção pode ser observada no link: <https://www.geogebra.org/classic/ptsn3jup>.



1. Qual é o resultado da soma dos ângulos internos do quadrilátero que vocês estão observando na construção?
2. Se movimentarmos um dos vértices, mantém-se um quadrilátero?
3. Para formar um retângulo, precisamos movimentar os vértices até que -----.
4. Qual é a soma dos ângulos internos desse retângulo?
5. Qual a conclusão que podemos levantar?

Essa construção visual da soma dos ângulos internos também pode ser feita transladando e rotacionando alguns ângulos, como na construção a seguir:



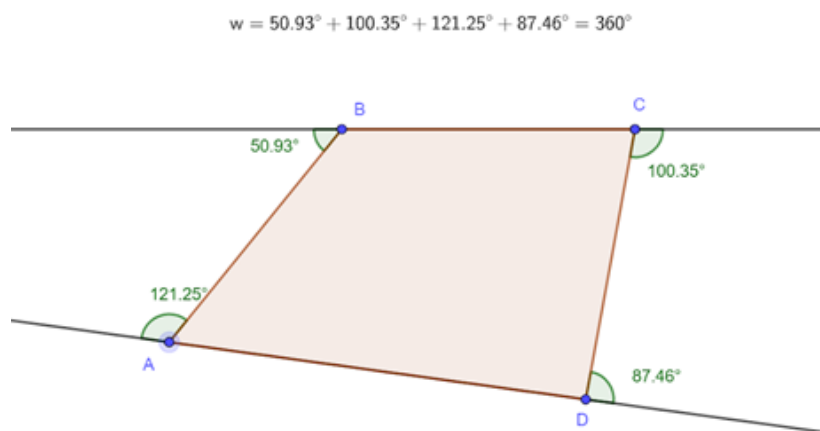
Fonte: Derivando a matemática.  
 Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/beqvhsth>  
 Acesso em: 24 nov. 2021. Para fins pedagógicos.

Essa construção visual da soma dos ângulos internos também pode ser feita transladando e rotacionando alguns ângulos, como na construção disponível em: <https://www.geogebra.org/m/beqvhsth>



## Soma dos ângulos externos de um quadrilátero é igual a 360°.

Estabelecida as relações dos ângulos internos de um quadrilátero, de modo análogo pode ser feito com os ângulos externos.

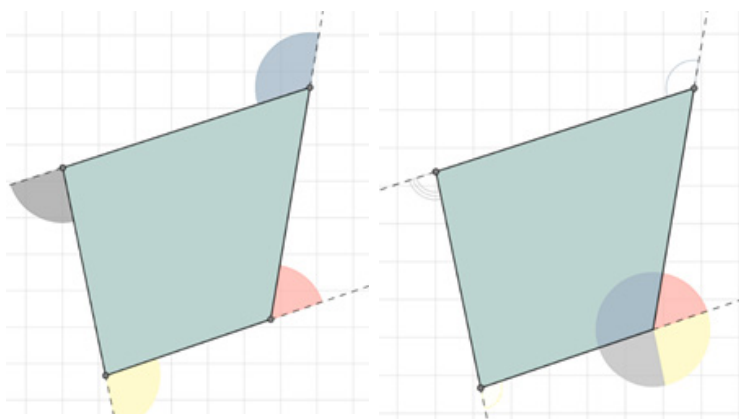


Fonte: **Acervo da Secretaria Municipal de Educação**. Equipe de Matemática, 2021.

A construção pode ser observada no link: <https://www.geogebra.org/classic/pcwptqyk>.



- a. Qual é o resultado da soma dos ângulos externos do quadrilátero que vocês estão observando na construção?



Fonte: Derivando a matemática.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/beqvhsth>. Acesso em: 24 nov. 2021.

Para fins pedagógicos.

Essa construção visual da soma dos ângulos internos também pode ser feita trasladando e rotacionando alguns ângulos, como na construção disponível em: <https://www.geogebra.org/m/beqvhsth>.



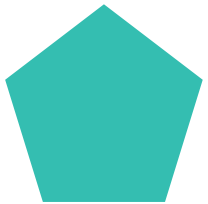
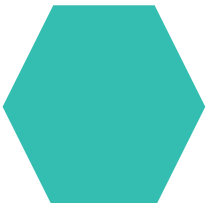


## Relacionando a soma dos ângulos internos do triângulo com a o quadrilátero.

- a. Qual a relação entre a soma dos ângulos internos do triângulo com a soma dos ângulos internos no quadrilátero?

Professor, a ideia aqui é a construção da relação com a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer com a soma dos ângulos internos de um triângulo, chegando à construção da generalização de que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo é:  $180 \cdot (n-2)$ , em que  $(n-2)$  representa a quantidade de triângulos inscritos no polígono, e  $180^\circ$  é exatamente a soma dos ângulos internos de um triângulo. Um modo de visualizar essa relação é tabulando os dados, como proposto na página 20 deste caderno.

- b. Com os dados levantados na tarefa anterior, preencha a tabela a seguir:

Polígono	Representação	N.º de lados	Soma dos ângulos internos	Relação
Triângulo		3	$180^\circ$	$180^\circ$
Quadrilátero		4	$360^\circ$	$2 \cdot 180^\circ$
Pentágono		5	$540^\circ$	$3 \cdot 180^\circ$
Hexágono		6	$720^\circ$	$4 \cdot 180^\circ$
Polígono de n lados		n		$(n-2) \cdot 180^\circ$

Essa tabela pode também ser construída no Excel, em que é estipulada a regra de formação de cada coluna, possibilitando uma visualização da relação para diferentes polígonos.

**c.** Quais conclusões podem ser levantadas?

A soma dos ângulos internos de um polígono equivale ao número de triângulos inscritos nesse polígono multiplicado por  $180^\circ$ . A soma dos ângulos internos depende da quantidade de lados do polígono.

**d.** Qual a relação entre a soma dos ângulos externos do triângulo com a soma dos ângulos externos do quadrilátero?

Professor, a ideia aqui é que a construção da relação com a soma dos ângulos externos de um polígono é sempre igual a  $360^\circ$ , ou seja, independe da quantidade de lados.

**e.** Quanto resulta a soma de um ângulo interno de um polígono com a soma do ângulo externo adjacente?

$180^\circ$ , pois um é suplemento do outro.

**f.** Quais conclusões podem ser levantadas?

A soma dos ângulos internos ( $SA_i$ ) adicionada à soma dos ângulos externos ( $SA_e$ ) de um polígono =  $180^\circ$

$$SA_i + SA_e = 180^\circ \cdot n$$

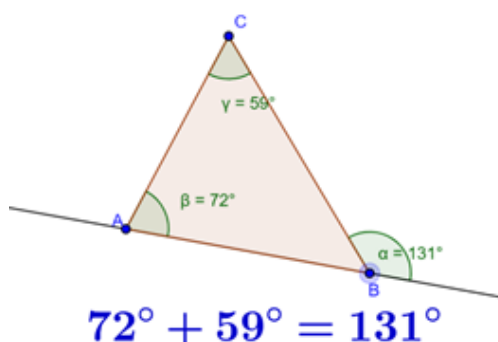
Mas a soma do ângulo interno é dada por:  $180^\circ (n-2)$

$$SA_e = 180n - 180(n-2)$$

$$SA_e = 360^\circ$$

Logo, a soma dos ângulos externos de um polígono independe do número de lados do polígono.

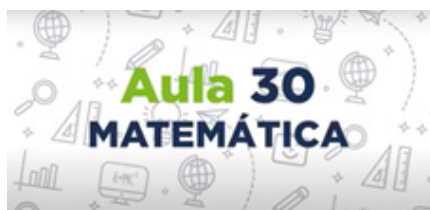
Como sugestão de sequência da proposta, outras propriedades de ângulos podem ser exploradas, como: **O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos outros dois ângulos não suplementares.**



Fonte: Thiago Farias Macêdo Arce, Marco.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kzuz9bv5>. Acesso em: 24 nov. 2021. Para fins pedagógicos.

## Para saber mais

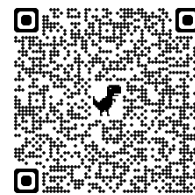


Nesse episódio do Podcast Matemática Humanista, o professor Carlos Mathias fala sobre o uso pedagógico da calculadora (e outras tecnologias) na escola e na universidade e, também, sobre como o não uso de recursos tecnológicos induz práticas inócuas artificialmente construídas para se encaixarem na estética usual escolar.



Disponível em: <https://www.matematicahumanista.com.br/podcast/episode/254e3ecc/episodio-7-o-uso-pedagogico-da-calculadora-e-outras-tecnologias-na-escola-e-na-universidade>. Acesso em: 24 nov. 2021

No ano de 2021, a videoaula n.º 30 (Triângulos) trouxe um encaminhamento, que pode ser ampliado sobre os triângulos, bem como os ângulos. A videoaula está disponível no link: <https://youtu.be/Gk-j8UBBuKLM>.



## 8.º ANO: MODELANDO UM PROBLEMA

Os objetivos descritos para o ciclo IV, que correspondem em "gerar novos modelos de resolução para comunicar-se matematicamente e usar desses conhecimentos matemáticos para compreender o mundo em que vive", se distribuem no 8.º ano nos seguintes eixos e conteúdos:

- **Números e operações:** números naturais, números inteiros, números racionais (fracionário e decimal, dízimas periódicas, porcentagem, notação científica); potenciação; raízes exatas; operações com frações e números decimais, suas propriedades e relações; números irracionais (números irracionais: dízimas não periódicas; raízes não exatas; número  $\pi$ ); números reais; conjuntos numéricos no diagrama de Venn.
- **Pensamento algébrico/álgebra:** proporcionalidade direta e inversa; sequências e padrões; incógnita e variável; linguagem algébrica; expressões algébricas e valor numérico; produtos notáveis; fatoração algébrica; equações do 1.º grau com uma e duas incógnitas; sistemas de equações; problemas que possam ser representados por equações do 2.º grau do tipo  $ax^2 = c$ ; inequações do 1.º grau.
- **Grandezas e medidas:** medidas de comprimento (*km, m, dm, cm e mm*); medidas de área (*km<sup>2</sup>, m<sup>2</sup> e cm<sup>2</sup>*); medidas de volume (*cm<sup>3</sup>, dm<sup>3</sup> e m<sup>3</sup>*); medidas de capacidade (l, ml); medidas de capacidade de armazenamento de dados (*bytes, quilobytes, megabytes, gigabytes e terabytes*).
- **Geometria:** retas (paralelismo, perpendicularismo, mediatriz de segmento); ângulos (bissetriz de ângulos, ângulos notáveis: 30°, 45°, 60° e 90°); figuras geométricas espaciais: poliedros (prismas, pirâmides, poliedros platônicos, entre outros), elementos dos poliedros (face, aresta e vértice), sólidos de revolução (cone, esfera e cilindro), vistas e perspectivas; triângulos (condição de existência, classificação por lados e ângulos, altura, mediana, bissetriz e mediatriz, congruência de triângulos, área e perímetro); quadriláteros (lados, vértices e ângulos, área e perímetro de paralelogramos e trapézios); círculos e circunferências (elementos do círculo:

circunferência, centro, raio, diâmetro, arco e corda, área do círculo e perímetro da circunferência); transformações geométricas no plano cartesiano.

- **Estatística e probabilidade:** tabelas e quadros (simples e de dupla entrada, elementos como título, fonte e data); gráficos (colunas e barras simples e múltiplas, cartogramas, setores, linhas e elementos gráficos como eixos, título, fonte, data e legenda, escala); pesquisa (população e amostra, coleta, organização e apresentação de dados, frequência absoluta e relativa, interpretação e análise de resultados); medidas de tendência central (médias aritméticas, moda, mediana, relação entre média, moda e mediana).

Com base nos objetivos do ciclo e nos eixos elencados, foi desenvolvido o Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, construído com o intuito de contribuir com o trabalho do professor, apresentando algumas sugestões de encaminhamentos metodológicos objetivando retomar o conhecimento do ano anterior do estudante e ampliar para o ano escolar em que se encontra.

Desse modo, para o 8.º ano, foi desenvolvida uma proposta dentro da unidade temática, a de pensamento algébrico/álgebra, abordando o critério de proporcionalidade. A metodologia sugerida foi a de jogos, em que, por meio do jogo intitulado Confeitaria Matemática, foram exploradas as ideias de dobro, triplo, metade, e também sugeridas discussões de situações em que as grandezas não são proporcionais.

É importante ressaltar que o critério referente à proporcionalidade vem de uma construção desde o ciclo II (4.º ano e 5.º ano), em que o estudante é instigado a realizar cálculos aproximados referentes à divisão em partes iguais e, na sequência, reconhecer grandezas diretamente proporcionais, como a quantidade de um produto e o valor a ser pago.

O próximo quadro elenca os critérios de ensino-aprendizagem do eixo pensamento algébrico/álgebra do 7.º ano, bem como os critérios do 8.º ano. Diante disso, é perceptível que há uma continuidade do ensino, tendo como fio condutor o movimento de avanço e a retomada constante do Currículo do ano anterior e do ano corrente.

## PENSAMENTO ALGÉBRICO/ÁLGEBRA

7.º ano	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre proporcionalidade na resolução de problemas apontam para os seguintes aspectos: resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas, utilizando representações algébricas. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 94).
8.º ano	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre proporcionalidade na resolução de problemas apontam para os seguintes aspectos: resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas e situações de não proporcionalidade, utilizando representações algébricas; analisar a variação entre duas grandezas, representando-a no plano cartesiano. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 105).

De modo a ampliar as atividades apresentadas do Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, na sequência, serão sugeridas possibilidades de continuidade nas propostas já apresentadas, mantendo o eixo e o critério, modificando apenas a metodologia, neste caso, para a **Modelagem Matemática**.

De acordo com o currículo da RME, a Modelagem Matemática, como perspectiva metodológica, consiste em processos de análise de problemas reais advindos de contextos socioculturais em que o estudante está inserido, ou seja, a partir de um problema levantado, é criada uma representação matemática (modelo matemático) que melhor possa resolvê-lo.

A elaboração de estratégias estabelece um modelo matemático que se dá de modo coletivo, em que juntos os estudantes levantam conjecturas, fazem análises e, na sequência, apresentam o modelo construído. Assim, a etapa mais importante está no processo da elaboração do que propriamente no resultado alcançado.

Na modelagem matemática, o objetivo principal não é o modelo em si, mas a aprendizagem que se destaca durante os passos a serem seguidos, pois é nesse processo que o conteúdo matemático vai sendo desenvolvido, sistematizado e aplicado. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 22).

Nessa perspectiva, a Modelagem Matemática, quando pensada na construção coletiva de estratégias, auxilia a superar a fragmentação entre os conteúdos matemáticos e suas articulações em práticas sociais, bem como com outras áreas do conhecimento..

## O “peso” da mochila

O trabalho desenvolvido com a Modelagem Matemática requer, além da construção de um modelo, a busca por uma situação a ser modelada. Então, dentro do critério de proporção, é sugerido que, em grupos, os estudantes busquem uma situação, dentro do contexto da escola, que necessite de um modelo para ser resolvido.

Destacando a proporcionalidade, o professor pode sugerir a relação entre a massa de um estudante e a massa correspondente à mochila que este carrega. Desse modo, é sugerido, para início de conversa, a sequência a seguir:

1. Vocês já pararam para pensar sobre o “peso” da mochila que carregam para vir até a escola? Qual a sua estimativa?
2. Você acha que tem dias em que ela está mais “pesada” e outros dias que ela está mais “leve”. Explique.



Fonte: <https://www.canva.com/photos/MADCKmdJn0o-tired-schoolgirl-with-h. Ae avy-backpack-isolated/>. Acesso em: 24 nov. 2021.

3. Qual será o motivo em se usar “aspas” quando se refere a palavra “peso”?

Professor, aqui é uma oportunidade de discutir a relação peso e massa, em que a palavra correta nesse contexto seria massa (pois o peso mostra a relação da massa com a aceleração da gravidade local e não apenas a massa), porém, no dia a dia usa-se na linguagem coloquial a palavra peso.

4. Quais as consequências em se transportar mochilas que excedam a recomendação?
5. Teria algum modo de diminuir esse “peso”? Substituir algum material por outro mais leve ou deixar de levar o que não usa na escola?
6. Em uma tabela, organize os dados, como: nome, massa corporal e massa da mochila.

Professor, se possível, é interessante que os estudantes tenham à disposição na escola uma balança para que possam realizar essas medições.



Disponível em: [https://www.canva.com/photos/MAEW26\\_oJUY-mechanical-bathroom-scale/](https://www.canva.com/photos/MAEW26_oJUY-mechanical-bathroom-scale/).  
Acesso em: 24 nov. 2021

7. A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que as crianças e jovens em idade escolar (6 aos 18 anos) carreguem mochilas apenas com menos de 10% do “peso” do seu corpo. Ou seja, se uma criança pesar 30 quilogramas, a sua mochila não deve ultrapassar os 3 quilogramas .

Utilizando a tabela anterior, acrescente uma coluna para indicar o “peso” máximo da mochila para cada estudante do grupo<sup>7</sup>.

8. Quais são os valores que variam? Por que variam?

A massa da mochila, pois esta depende da massa do estudante, por isso ela varia.

9. Se a massa corporal diminui, o que acontece com a massa da mochila dentro dos padrões da OMS?

<sup>7</sup> Fonte: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2020-01/mochilas-pesadas-na-infancia-acarretam-problemas-na-fase-adulta>

- 10.** É possível criar um modelo matemático para essa situação, de modo que possa ser aplicado para qualquer pessoa?

Se for considerada apenas a massa, sim, pois basta multiplicar a massa corporal por 10%, que se conclui o valor máximo a ser carregado.

- 11.** O dado referente a massa seria o suficiente?

Professor, esse questionamento surge para a reflexão em relação, por exemplo, a um estudante de estatura inferior à de outro estudante, porém com o mesmo “peso”. Se ele for carregar uma mochila com 10% do seu “peso”, seria o ideal?

- 12.** Esse padrão de referência de 10% é 100% confiável? Quais variações devem ser levadas em consideração?

- 13.** De acordo com os dados da tabela construída, qual a diferença, em percentual, da massa atual da mochila para a massa máxima indicada? Quantos estudantes ultrapassam o valor sugerido?

- 14.** Reunindo os dados de toda a turma, construa um gráfico de barras indicando quantos estudantes estão acima e quantos estão abaixo da média dos 10% indicados pela OMS.

- 15.** Utilizando um gráfico de setores, apresente os dados anteriores, porém na representação percentual.

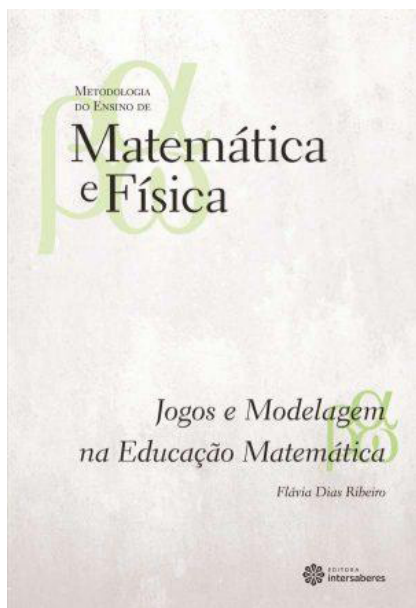
Professor, essa é apenas uma sugestão de sequência didática, porém as explorações referentes a esse tema podem ser ampliadas inclusive para outros eixos, como por exemplo estatística e probabilidade. Outra possibilidade é a de realizar um trabalho interdisciplinar com o componente curricular de Educação Física, trabalhando o aspecto da ergonomia e qualidade do movimento.

## Para saber mais

### Artigo: CARGA LIMITE DE PESO DA MOCHILA DE ESCOLARES

Cristiane Bonvicine - Universidade Paulista (UNIP)  
Gabriele Alexandre de Freitas - Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto (FAMERP).

Nesse estudo, as autoras analisam os possíveis riscos de alteração postural provenientes do excesso de carga nas mochilas, levando em consideração dados como altura, massa corpórea, IMC e idade.



Com o objetivo de produzir novos saberes dos docentes de matemática, propondo reflexões sobre os aspectos teóricos e práticos, a autora propõe análises e reflexões sobre o uso de jogos didáticos e projetos de modelagem.

RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. Curitiba: Saraiva, 2007.

## 9.º ANO: VAMOS INVESTIGAR PARA APRENDER?

Como descrito anteriormente, os objetivos para o ciclo IV, que correspondem em “gerar novos modelos de resolução para comunicar-se matematicamente e usar desses conhecimentos matemáticos para compreender o mundo em que vive”, se distribuem no 9.º ano nos seguintes eixos e conteúdos:

- **Números e operações:** Números reais: operações fundamentais; números reais na reta numérica; potenciação; notação científica; radicais: propriedades; simplificação de operações; racionalização; educação financeira: juros simples, noção de juros compostos.

- **Pensamento algébrico/álgebra:** Sequências e padrões; proporcionalidade direta e inversa; equações: problemas envolvendo equações de 1.º grau e 2.º grau; sistemas de equações de 1.º grau e 2.º grau; equações de 2.º grau completas e incompletas; funções: função afim e quadrática; representação gráfica de função afim.
- **Grandezas e medidas:** Medidas: comprimento (*km, m, dm, cm e mm*); área (*km<sup>2</sup>, m<sup>2</sup> e cm<sup>2</sup>*); volume (*cm<sup>3</sup>, dm<sup>3</sup> e m<sup>3</sup>*); capacidade de armazenamento de dados (*bytes, kilobytes, megabytes, gigabytes e terabytes*); unidades de medidas diversas (nano, micro e ano-luz); perímetro e área; grandezas compostas: velocidade, aceleração, densidade e potência.
- **Geometria:** Ângulos: ângulos em feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal; Teorema de Tales; ângulos inscritos; figuras geométricas espaciais: poliedros e sólidos de revolução; poliedros (prismas, pirâmides, poliedros platônicos, entre outros); elementos dos poliedros (face, aresta e vértice); sólidos de revolução (cone, esfera e cilindro); vistas e perspectivas; triângulos (semelhança de triângulos); teorema fundamental da semelhança; triângulo retângulo; relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras; razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente); círculos e circunferências (comprimento de circunferência); área de círculos, coroas e setores; posições relativas entre circunferências; inscrição e circunscrição de polígonos em uma circunferência; proporcionalidade: razão e proporção; homotetia; plano cartesiano: distância entre pontos.
- **Estatística e probabilidade:** tabelas e quadros (simples e de dupla entrada); elementos (título, fonte e data); gráficos (colunas e barras simples e múltiplas, cartogramas, setores, linhas e histograma); elementos (eixos, título, fonte, data e legenda); escala; pesquisa (população e amostra), coleta, organização e apresentação de dados; amplitude; frequência absoluta e relativa; interpretação e análise de resultados; medidas de tendência central (médias aritméticas); moda; mediana; relação entre média, moda e mediana; probabilidade (conceituação); representação fracionária, percentual e decimal; experimento aleatório, espaço amostral e evento; soma de probabilidades do espaço amostral igual a 1.

Com base nos objetivos do ciclo e os eixos elencados, foi desenvolvido o Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, construído com o intuito de contribuir com o trabalho do professor, apresentando algumas sugestões de encaminhamentos metodológicos com a intenção de retomar o conhecimento do ano anterior do estudante e ampliar para o ano escolar em que se encontra.

Desse modo, para o 9.º ano, foi apresentada uma proposta utilizando **materiais manipuláveis**<sup>8</sup>. Essa proposta consistia em recortar quadrados de dois tamanhos diferentes, com 8 cm e 4 cm de lado, e metade desses quadrados cortados na diagonal, formando dois triângulos retângulos, ou dividindo o quadrado em dois retângulos congruentes. A partir dessas figuras foram levantadas diferentes problematizações, oriundas de construções e possibilidades de construções atendendo às orientações previamente apresentadas.

Nessas problematizações haviam diversos questionamentos relacionando o perímetro, a área e as medidas dos lados das figuras formadas. Ou ainda, eram apresentadas diferentes informações e foi pedido para construir uma figura, com as peças recortadas, que atendessem a essas condições. Assim, a proposta ia tomando forma num constante ir e vir, levantando diferentes questionamentos acerca do tema, apresentando diferentes dados e analisando as diferentes formas construídas e exploradas na atividade.

O quadro, a seguir, elenca os critérios de ensino-aprendizagem do eixo grandezas e medidas do 8.º ano, bem como os critérios do 9.º ano. Diante disso, é perceptível que há uma continuidade do ensino, tendo como fio condutor o movimento de avanço e a retomada constante do Currículo do ano anterior e do ano corrente.

GRANDEZAS E MEDIDAS	
8.º ano	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre perímetro e área na resolução de problemas apontam para os seguintes aspectos: compreender, utilizar e calcular medidas (utilizando, inclusive, expressões de cálculo) de comprimento e área (retângulos, quadrados, triângulos e paralelogramos), relacionando as unidades de medidas mais usuais. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 107).
9.º ano	Os critérios de ensino-aprendizagem sobre perímetro e área na resolução de problemas apontam para os seguintes aspectos: compreender, utilizar e calcular medidas de comprimento e área, relacionando as unidades de medidas mais usuais; compreender a razão de semelhança para o cálculo de área e perímetro de figuras planas semelhantes. (CURITIBA, 2020, v. 5, p. 116-117).

De modo a ampliar as atividades apresentadas do Caderno Pedagógico de Unidades Curriculares de Transição 2020/2021, é possível dar continuidade no encaminhamento apresentado, porém abordando outra metodologia pedagógica, como a **investigação**.

8 Disponível em: <https://mid-educacao.curitiba.pr.gov.br/2021/6/pdf/00299868.pdf>. Acesso em: out. 2021

O professor tem um papel muito importante para a realização de uma aula investigativa, além de propor uma atividade que desperte o interesse dos estudantes, ele deverá desafiá-los para que realizem a **investigação** (individualmente, em pares e em grupos) e, ainda, discutir e analisar os resultados obtidos por cada um deles. Nesse tipo de atividade, o estudante constrói o próprio conhecimento e contribui para a construção do conhecimento dos colegas, uma vez que cada estudante/grupo faz suas próprias observações e análises, cria as próprias estratégias e chega às suas conclusões, que podem (ou não) ser diferentes das demais. Por isso, é importante que, após a realização da atividade proposta, haja um momento e um espaço para que cada um possa apresentar aos colegas os caminhos percorridos e as conclusões obtidas, de modo a perceber semelhanças e diferenças entre os raciocínios e as conclusões.

**Área e perímetro** são dois conceitos que, muitas vezes, acabam confundidos pelos estudantes. Isso porque, em geral, os dois são trabalhados isoladamente e desconectados da ideia de construção do pensamento. Desse modo, sugerimos algumas atividades voltadas à **investigação** matemática.

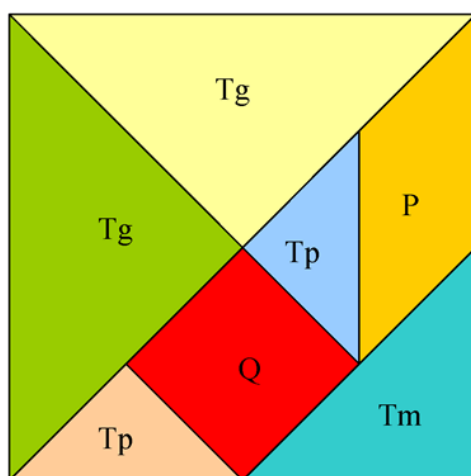
Para o desenvolvimento da proposta, propomos a utilização e exploração do tangram em sala de aula. Para tanto, o professor poderá optar por levar jogos de tangram “prontos”, para explorar com os seus estudantes ou construir junto com a turma. O ideal é que cada estudante tenha um tangram, para que possa explorá-lo e fazer as construções necessárias.

Para construir um tangram, você precisará de uma folha de papel (pode ser uma folha sulfite), régua e tesoura. Existem vários modos de construir o tangram utilizando dobradura. Em alguns desses modos, é possível, inclusive, utilizar régua e compasso para a construção das 7 peças que formam o tangram.

Caso o professor opte por construir o tangram com seus estudantes, durante a construção, pode ir retomando diferentes assuntos estudados ao longo do Ensino Fundamental, como o conceito de polígonos, de ângulo (ângulo reto, em especial), classificação de triângulos e quadriláteros, diagonais do quadrado, congruência de figuras planas, etc. Enfim, a diversidade de assuntos que permeiam a construção do tangram é bastante ampla.

Professor, você sabe como construir um tangram? Ao fazer uma busca na internet, há vários vídeos e tutoriais ensinando diferentes maneiras de construir este quebra-cabeça, como por exemplo o vídeo "TUTORIAL: COMO FAZER MEU PRÓPRIO TANGRAM". Este vídeo está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hLfzvr6KSdo>. Acesso em: 14 nov. 2021.

Construído o tangram, teremos a seguinte figura:



Fonte: **Acervo da Secretaria Municipal de Educação**. Equipe de Matemática, 2021.

O tangram é formado por 7 peças, sendo 2 triângulos grandes (Tg), 1 triângulo médio (Tm), 2 triângulos pequenos (Tp), 1 quadrado (Q) e 1 paralelogramo (P). Tomaremos o quadrado (Q) como unidade de medida padrão para o cálculo da área. Combine com os estudantes que o quadrado Q terá área 1 e assim todos os estudantes estarão usando o mesmo parâmetro para os seus cálculos.

Combinado este parâmetro de medida de área, peça aos estudantes que, a partir do quadrado (Q), determinem qual é a área das outras peças do tangram. Para isso, eles poderão trabalhar individualmente ou em pequenos grupos, explorando as demais peças do jogo e tirando suas próprias conclusões. Neste momento, é importante que haja um registro escrito, pois as respostas obtidas serão necessárias na continuidade da proposta. Essas anotações podem ser feitas no caderno ou em cada uma das peças do tangram, caso o estudante tenha construído (em papel) o seu próprio jogo.

Após essa exploração inicial, é esperado que os estudantes cheguem à seguinte conclusão acerca das áreas de cada figura do tangram:

$$T_g = 2 \text{ u.a}$$

$$T_p = \frac{1}{2} \text{ u.a}$$

$$T_m = 1 \text{ u.a}$$

$$P = 1 \text{ u.a}$$

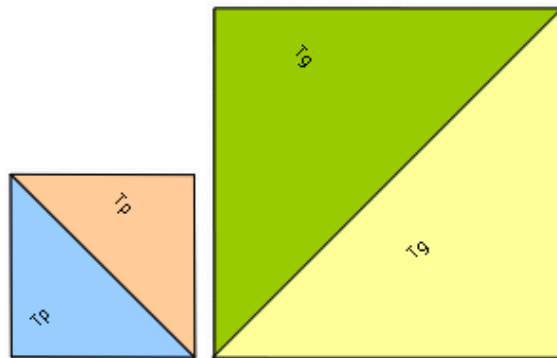
É importante que, após chegarem às suas próprias conclusões, seja propiciado um momento em que os estudantes possam falar sobre quais foram os procedimentos e estratégias que eles utilizaram. É provável que os estudantes tenham realizado a sobreposição das peças e percebido que, por exemplo, cada  $T_p$  corresponde à metade do quadrado. E, ainda, que reorganizando os dois  $T_p$ , é possível formar o  $P$  e o  $T_m$ . Ou ainda, utilizando o  $Q$  e dois  $T_p$ , é possível formar o  $T_g$ .

Porém, esta não é a única maneira de se determinar as áreas das peças. Pode ser que algum estudante busque, através de proporções e escalas, descobrir as medidas aproximadas de cada peça para, então, efetuar o cálculo das áreas algebricamente. Por exemplo, se a área do  $Q$  é 1 u.a, então, quer dizer que seus lados medem 1 u. Logo, qualquer outra peça que tenha um lado de mesmo tamanho do lado do quadrado, esse lado medirá 1 u. Assim, será possível determinar as áreas por meio de multiplicações (base x altura, por exemplo).

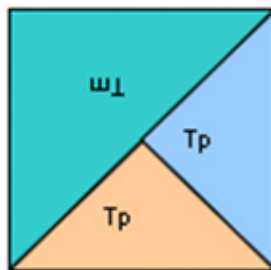
Este momento de compartilhamento é essencial, pois além de um estudante poder contribuir com a aprendizagem do outro, todos os raciocínios e estratégias podem ser compartilhados. Alguns meios serão mais fáceis do que outros, mas todas as estratégias serão válidas e as respostas obtidas podem variar, conforme estratégia de cada um, especialmente se houver medições e cálculos aproximados.

Na sequência, os estudantes podem ser desafiados a construir quadrados com 2, 3, 4, 5, 6 e 7 peças. Para alguns desses casos haverá mais de uma solução, assim como para outros, não haverá solução. Neste momento, para cada quadrado construído, é importante que os estudantes registrem quais foram as peças utilizadas e qual a área de cada quadrado obtido.

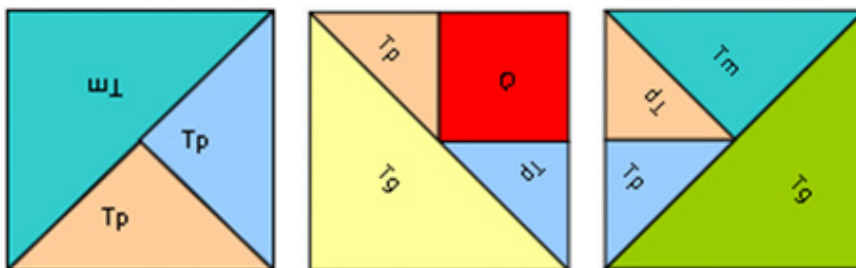
- Usando duas peças – 1 u.a. e 4 u.a.



- Usando três peças – 2 u.a.



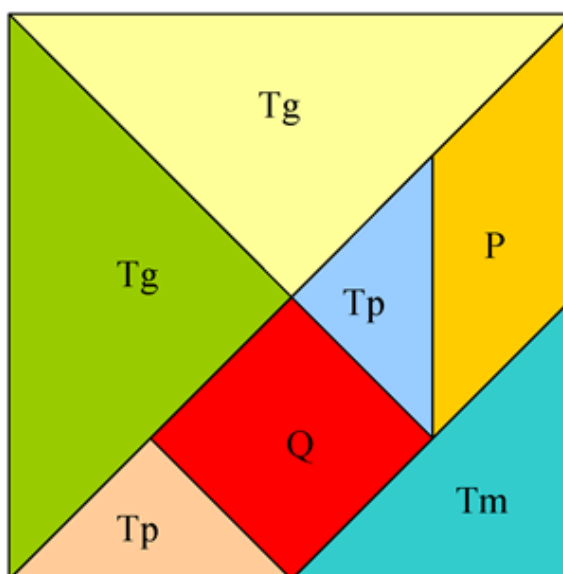
- Usando quatro peças – 4 u.a.



- Usando cinco peças – 4u.a.



- Usando seis peças – não é possível construir.
- Usando sete peças – 8 u.a.



Ao determinar as áreas de cada figura obtida, espera-se que os estudantes somem as áreas de cada uma das peças utilizadas para determinar a área total. No entanto, também é possível que ele utilize expressões de cálculo, verificando qual a medida dos lados dos quadrados e calculando.

$$\text{Área do quadrado} = \text{lado} \times \text{lado} = (\text{lado})^2$$

Após essas construções, é interessante que os estudantes tenham mais um momento de troca, a fim de verificar quais foram as respostas obtidas e, também, para levantar novos questionamentos. Esses novos questionamentos podem ser no sentido de: é possível fazer outras construções, utilizando outras peças no tangram, que atendam ao que foi solicitado? Por que não é possível construir um quadrado com 6 peças? Qual a relação entre o tamanho do lado do quadrado e a sua área?

Ainda com relação à exploração das áreas das figuras formadas com as peças do tangram, é possível, ainda, fazer o caminho contrário, fornecendo informações sobre o tamanho da área desejada e solicitando que os estudantes construam figuras com áreas estipuladas. Por exemplo:

De acordo com a área estipulada, formar um:

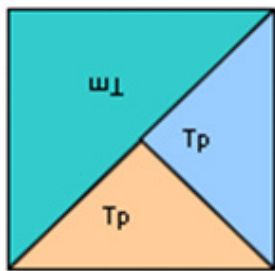
- a) triângulo de área 4,5;
- b) retângulo de área 4;
- c) retângulo de área 8;
- d) paralelogramo de área 6.

Para isso, os estudantes deverão decidir quais seriam as peças adequadas para construir as figuras e fazer as suas tentativas.

Dando continuidade à proposta, passamos agora, a estabelecer relações das áreas com as medidas dos lados das peças do tangram. Anteriormente, foram construídos quadrados utilizando diferentes quantidades de peças do tangram. O que eles têm em comum? Como se calcula a área de um quadrado?

A partir dessas indagações, é importante lembrar com os estudantes que a área de um quadrado qualquer pode ser calculada por:  $\text{área do quadrado} = \text{lado} \times \text{lado} = (\text{lado})^2$ . Com base nessa informação e nos quadrados construídos, é possível dar sequência à atividade investigativa solicitando aos estudantes que determinem as medidas dos lados de cada peça do tangram.

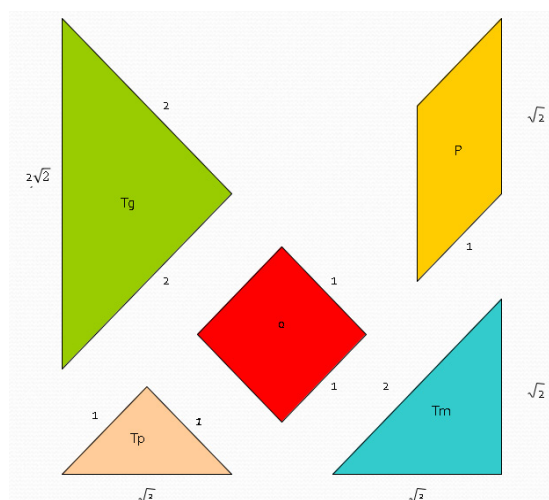
Durante a exploração, vários questionamentos e estratégias podem surgir. Por exemplo, ao analisar o quadrado formado por 3 peças.



A área desse quadrado é 2 (conforme visto anteriormente). Isso quer dizer que existe algum número que elevado ao quadrado resulta em 2. Que número será esse? O valor que responde a essa questão corresponde à hipotenusa dos triângulos pequenos e aos catetos do triângulo médio (lados do quadrado formado).

Professor, neste momento, se couber, você poderá aproveitar para apresentar/comentar/retomar o teorema de Pitágoras, visto que todos os triângulos do tangram são triângulos retângulos.

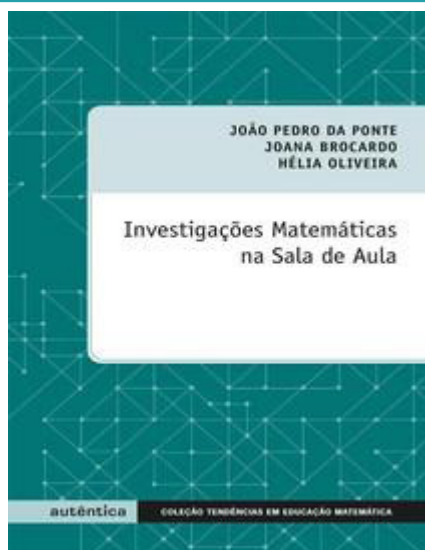
Depois de analisar todas as peças e quadrados formados, espera-se que os estudantes cheguem às seguintes conclusões:



Novamente, cabe aqui um momento de discussão, a fim de que os estudantes possam expor para os colegas e professor quais foram as suas ideias, estratégias e resultados obtidos. Neste momento, o professor pode ainda retomar o caso de que não foi possível construir um quadrado com 6 peças. Com os conhecimentos construídos até aqui, como podemos justificar o fato de não ter sido possível?

Uma justificativa plausível pode ser que, ao selecionar 6 peças, sempre uma das peças do tangram ficará de fora. Se uma das peças com área igual a 1 (Q, P ou Tm) ficar de fora, precisaríamos formar um quadrado com área igual a 7. Para isso, seria necessário que os lados desse quadrado medissem  $\sqrt{7}$ , mas isso não é possível. E caso deixássemos de fora uma peça com área igual a 0,5 (Tp) ou a 2 (Tg), seria possível?

## Para saber mais



PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

Neste livro, os autores trazem uma discussão sobre o que é uma aula investigativa, quais suas características e objetivos. Além disso, são apresentados alguns exemplos e relatos de experiências de alguns professores que utilizaram essa metodologia em sala de aula em turmas de Ensino Fundamental e Médio, mostrando resultados de pesquisas que ilustram as vantagens e as dificuldades de se trabalhar na perspectiva da investigação matemática. Vale a pena a leitura!



No ano de 2021, nas videoaulas de número 48 e 49 (Perímetro e Área), foi proposto um encaminhamento bastante interessante, que pode ser ampliado. Foram abordadas algumas problematizações bastante ricas, envolvendo perímetro e área. As videoaulas estão disponíveis nos links [https://www.youtube.com/watch?v=Nx-zLg7\\_3iM&list=PLE-tRs8lszOgXiHn1ar3\\_YIXl9\\_YpzuLem&index=52](https://www.youtube.com/watch?v=Nx-zLg7_3iM&list=PLE-tRs8lszOgXiHn1ar3_YIXl9_YpzuLem&index=52) (aula 48) e [https://www.youtube.com/watch?v=8yh2ofeG6ts&ab\\_channel=CanalTVEscolaCuritiba](https://www.youtube.com/watch?v=8yh2ofeG6ts&ab_channel=CanalTVEscolaCuritiba).

## POSSÍVEIS ADEQUAÇÕES

Considerando que as turmas são heterogêneas e que os estudantes apresentam níveis diferentes de aprendizagem, é necessário que o planejamento das atividades pedagógicas seja de acordo com os níveis de cada um dos estudantes, levando em consideração as especificidades de cada um, de modo a incentivar e promover o avanço de todos. A seguir, sugerimos algumas atividades de adequações:

### ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 6.º ANO

1. Camila lançou dois dados e obteve os números 4 e 3. Que operação ela pode fazer para chegar ao resultado 12?
2. Joana também deveria chegar ao resultado 12, mas obteve nos dados os números 2 e 6. Como ela poderá obter esse resultado?
3. Renato lançou dois dados e tirou os números 4 e 5, e disse que conseguiu chegar ao resultado 1. Que cálculo ele pode ter feito?
4. Vinicius lançou dois dados e obteve os números 2 e 6. Qual dos cálculos abaixo ele pode ter feito para chegar ao resultado 3?

a.  $6 + 2$

b.  $6 - 2$

c.  $6 \times 2$

d.  $6 \div 2$

5. Milena lançou dois dados e, com os valores obtidos, fez o seguinte cálculo:

$$5 \div 5$$

Qual o resultado obtido?

6. Pedro lançou os seus dados e obteve os números 6 e 2 e tinha por objetivo chegar ao resultado 4. Ele efetuou os cálculos corretamente, mas, acidentalmente, derrubou água em suas anotações, borrando seus cálculos.

$$6 \cdot 2 = 4$$

Que símbolo matemático estava escrito no lugar do borrão?

## ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 7.º ANO

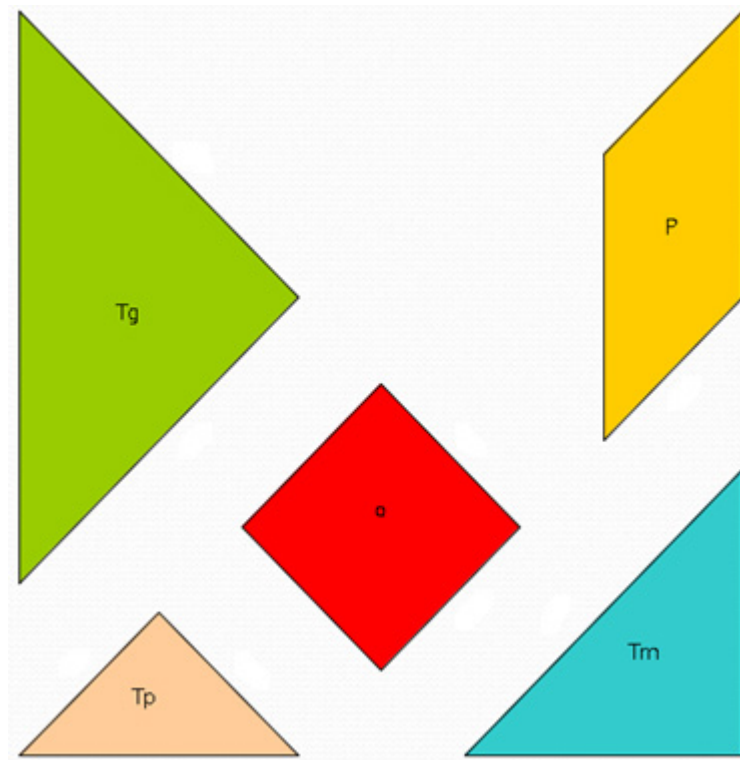
O trabalho desenvolvido com ângulos, no intuito da construção da ideia da soma dos ângulos internos e externos de um polígono, pode ser inicialmente explorado com o material manipulável, como o tangram. Utilizando o transferidor, o estudante pode aferir as medidas dos ângulos internos dos triângulos e quadriláteros que constituem o tangram. Na sequência, ele pode realizar a soma desses ângulos. Para o ângulo externo, faz-se necessário o prolongamento dos lados, portanto, o estudante precisa fixar a peça sobre uma folha para assim traçar esse prolongamento. É importante que os dados colhidos sejam registrados. Partindo do manipulável, agora o estudante pode ser direcionado para o software. Inicialmente, ele deve explorar a plataforma, os ícones, construir, apagar, para que se familiarize com as ferramentas.

## ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 8.º ANO

A proposta sugerida, no critério de proporção, pode também ser explorada com o uso exclusivo da balança, em que o estudante pode realizar a “pesagem” de 3 mochilas, por exemplo, e ir anotando os dados. Na sequência, ele pode colocar em ordem crescente esses valores e calcular as diferenças entre a mochila 1 e 2, 2 e 3, 1 e 3. Os questionamentos para essas situações propostas podem ser bem específicos, como: quantos kg (ou g) a mochila 2 tem a mais que a mochila 1? É importante que o estudante consiga trazer essa problematização para a realidade dele, de modo a tornar esse processo significativo. E para finalizar com a ideia de proporcionalidade, uma sugestão de questionamento é: para cada 1kg da mochila 2, quantos kg tem para a mochila 3?

## ADEQUAÇÕES METODOLÓGICAS PARA O 9.º ANO

Ao explorar a utilização do tangram para trabalhar o conceito de perímetro, os lados de cada uma das peças poderão ser medidos com o auxílio de uma régua, uma vez que será necessário realizar a soma de todos os lados de cada uma das peças separadamente.



Assim, as respostas obtidas pelos estudantes dependerão do tamanho do tangram que cada um construiu. Além disso, também poderá ser observado que peças congruentes possuem o mesmo perímetro.

## PALAVRAS FINAIS

Retomando a epígrafe inicial deste material: *Mais importante que saber matemática é saber pensar matematicamente* (CIFUENTES, 2016), é essencial que o professor incorpore às propostas sugeridas e o ímpeto em desenvolver a autonomia do pensar e fazer matemática do estudante, desmistificando a ideia de que a matemática se reduz a fórmulas, técnicas, algoritmos e demonstrações.

Como salientado por Cifuentes (2016), "é como ir a um museu de arte e apreciar apenas as molduras dos quadros e não os próprios quadros, eles trazem a paisagem da floresta matemática cuja percepção envolve faculdades como a intuição e a imaginação".

A floresta matemática mencionada não se restringe a um ano específico, mas a todos os anos, englobando tanto os iniciais como os finais, bem como os ciclos I, II, III e IV. Isso exalta a importância que se deve dar à passagem de um ano para o outro, tendo como um processo contínuo, não há um encerramento de um para o início de outros, pelo contrário, deve haver uma continuidade do trabalho. A construção de significados vivenciada nos anos iniciais é o que possibilita as generalizações desenvolvidas nos anos finais, porém, sem essa significação consolidada, as generalizações perdem sentido.

Portanto, as propostas que foram sugeridas neste material podem ser adaptadas ao contexto em que o estudante está inserido, bem como aos conhecimentos consolidados no ano anterior. Por esse motivo, são propostas construídas com possibilidades de ampliação e adaptação.

## REFERÊNCIAS

- ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.
- BONVICINE, Cristiane; FREITAS, Gabriele. A. Carga limite de peso da mochila em escolares. **Arquivos de Ciências da Saúde (FAMERP)**, v. 22, p. 91-95, 2015. Disponível em: <https://www.cienciasdasaude.famerp.br/index.php/racs/article/view/27>. Acesso em: 24 nov. 2021
- CIFUENTES, José C. Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na “Floresta Matemática”. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 11, n. especial, p. 47-66. UFSC, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11nespp47/33436>. Acesso em: 23 nov. 2021.
- CURITIBA. Prefeitura Municipal de Curitiba. Secretaria Municipal da Educação. **Currículo do Ensino Fundamental: diálogos com a BNCC. v. 1 – Princípios e fundamentos**. Curitiba: SME, 2020.
- CURITIBA. Prefeitura Municipal de Curitiba. Secretaria Municipal da Educação. **Currículo do Ensino Fundamental: diálogos com a BNCC. v. 5 – Matemática**. Curitiba: SME, 2020.
- DIENES, Zoltan. **As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática**. São Paulo: EPU, 1972.
- GADOTTI, Moacir. A escola na cidade que educa. **Centro de Estudos e Pesquisa em Educação, Cultura e Ação Comunitária**, v.1, n.1, p. 133-139, 2006.
- PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2016.
- RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. Curitiba: Saraiva, 2007.

# FICHA TÉCNICA

## DEPARTAMENTO DE ENSINO FUNDAMENTAL

Simone Zampier da Silva

### Coordenação e revisão crítica

Luciana Zaidan Pereira

### Gerência de Currículo

Luciana Zaidan Pereira

### Equipe Pedagógica da Gerência de Currículo

Franciele Sant Ana Loboda

Pamela Zibe Manosso Perussi

Viviane da Cruz Leal Nunes

### Equipe da Gerência de Currículo

Alessandra Hendi dos Santos

Ana Carolina Furis

Ana Lúcia Maichak de Gois Santos

Ana Paula Ribeiro

Andréa Borowski Gomes

Angela Cristina Cavichiolo Bussmann

Cristiane Lopuch Nogueira

Déa Maria de Oliveira Aguiar

Debora Glodzinski Dugonski

Dircélia Maria Soares de Oliveira Cassins

Fabiola Berwanger

Franciane Cristina da Silva

Giselia dos Santos de Melo Gonçalves

Greici de Camargo Margarida

Jacqueline Mascarenhas Cercal

Janaína Frantz Boschilia

Juliana da Cruz de Melo

Justina Inês Carbonera Motter Maccarini

Karin Willms

Kátia Giselle Alberto Bastos

Kelly Cristhine Wisniewski de Almeida Colleti

Lígia Marcelino Krelling

Lilian Costa Castex  
Luciana Schuartz Brandt  
Magaly Quintana Pouzo Minatel  
Marcos Roberto dos Santos  
Rosângela Maria Baiardi de Deus  
Santina Célia Bordini  
Tais Grein  
Thiago Luiz Ferreira  
Vanessa Marfut de Assis

### **Elaboração – Equipe de Matemática**

Alessandra Hendi dos Santos  
Ana Paula Ribeiro  
Juliana da Cruz de Melo  
Justina Inês Carbonera Motter Maccarini  
Kátia Giselle Alberto Bastos

### **Revisão de Língua Portuguesa**

Paula Francielle Domingues  
Pamela Zibe Manosso Perussi

## **SUPERINTENDÊNCIA DE GESTÃO EDUCACIONAL**

Andressa Woellner Pereira Duarte

### **Gerência de Apoio Gráfico**

Kleber Alves Bornatto

### **Projeto Gráfico**

Ana Cláudia Andrade de Proença

### **Diagramação**

Ana Cláudia Andrade de Proença

### **Revisão de Língua Portuguesa**

Rosana Wippel









**CURITIBA**

Prefeitura Municipal de Curitiba  
Secretaria Municipal da Educação  
Superintendência de Gestão Educacional